

Livret pour la Terminale Maths Complémentaires

Sommaire

➤ Quelques conseils	page 1
➤ Second degré : Rappels	page 2
➤ Exercices second degré	page 3
➤ Dérivation : Rappels	page 4
➤ Exercices dérivation	page 6
➤ Suites : Rappels	page 8
➤ Exercice suites	page 9
➤ Fonction exponentielle : Rappels	page 11
➤ Exercices fonction exponentielle	page 12
➤ Probabilités : Rappels	page 13
➤ Exercices probabilités	page 14
➤ Eléments de correction Exercices second degré	page 15
➤ Exercices dérivation	page 18
➤ Exercices suites	page 20
➤ Exercices fonction exponentielle	page 23
➤ Exercices probabilités	page 26

Ce livret met l'accent sur quatre thèmes fondamentaux pour la Terminale Mathématiques Complémentaires : second degré, dérivation, suites, fonction exponentielle. Un autre thème est assez important : probabilités.

Pour chacun de ces thèmes :

- Connaître le cours (faire des fiches), refaire plusieurs fois les exemples et les exercices du cours.
- Refaire tous les DS, les interrogations et les DM, ainsi que les exercices proposés dans ce document, faits pendant l'année, d'abord sans aucune aide, puis si nécessaire avec l'aide du cours et en dernier recours de la correction.
- Penser à l'aide qu'apporte la calculatrice : maîtriser la représentation graphique de fonctions, l'utilisation du menu statistiques, le calcul des termes d'une suite... Dès que possible, vérifier les réponses à l'aide de la calculatrice.
- **Il est conseillé de fractionner le travail (éviter les longues séances de révision : il est préférable de se concentrer par exemple 30 minutes sur un exercice, sans musique ni téléphone à portée de main).**
- **Il vous est conseillé de dédier un cahier à votre travail des vacances, en mathématiques ou dans d'autres matières. Vous pourrez ainsi le présenter à vos professeurs à la rentrée pour qu'ils puissent mesurer vos efforts.**

Certains de ces exercices sont difficiles, il est normal de ne pas savoir tout faire du premier coup !

Les premiers chapitres de Terminale Mathématiques complémentaires devraient concerner les suites, la dérivation et les probabilités : **terminer** les révisions par ces notions.

En fin de livret, on trouvera des éléments de correction.

Second degré : Rappels de cours

➤ Un trinôme du second degré peut s'écrire sous plusieurs formes :

- **forme développée :** $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **forme canonique :** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux réels fixés.
- **forme factorisée éventuelle :** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines éventuelles.

➤ Somme et produit des racines :

Si f admet deux réels (éventuellement confondus) x_1 et x_2 pour racines, alors :

- La **somme** des racines est : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Le **produit** des racines est : $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

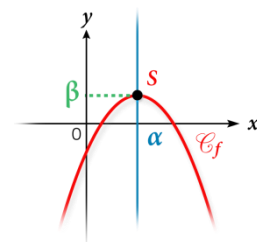
➤ Représentation graphique ; variations

La courbe représentant f est une **parabole** de sommet $S(\alpha ; \beta)$.

Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ("heureuse"). On en déduit les variations de f .

Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas ("triste"). On en déduit les variations de f .

La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

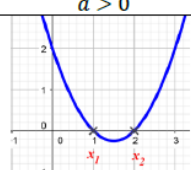
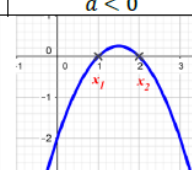
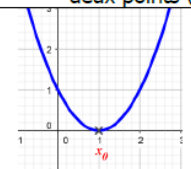
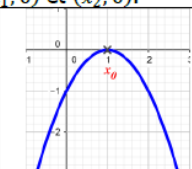
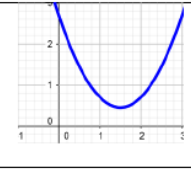
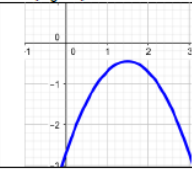


➤ Equation du second degré

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) correspondent aux racines de f .

Méthode :

- Toujours essayer de repérer une factorisation (par un facteur commun ou par une identité remarquable).
- Repérer une racine « évidente », puis calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines.
- Dans le cas où on ne remarque rien de particulier, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de $\Delta = b^2 - 4ac$	Racines de f	Forme factorisée de f	Signe de $f(x)$	Courbe représentative de f											
				$a > 0$	$a < 0$										
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Signe de $f(x)$</td> <td></td> <td>Signe de a</td> <td>Signe de $-a$</td> <td>Signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	Signe de $f(x)$		Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a	 	La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$.
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$											
Signe de $f(x)$		Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a											
$\Delta = 0$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Signe de $f(x)$</td> <td></td> <td>Signe de a</td> <td>Signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	Signe de $f(x)$		Signe de a	Signe de a	 	La parabole coupe l'axe des abscisses en son sommet $(x_0; 0)$.		
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$												
Signe de $f(x)$		Signe de a	Signe de a												
$\Delta < 0$	aucune	Ne se factorise pas	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Signe de $f(x)$</td> <td colspan="2">Signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	Signe de a		 	La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.				
x	$-\infty$	$+\infty$													
Signe de $f(x)$	Signe de a														

Exercices second degré

Exercice 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

On admet que pour tout réel x on a :

$$f(x) = -(x + 1,5)^2 + 6,25 \text{ et pour tout réel } x \text{ on a :}$$
$$f(x) = -(x + 4)(x - 1).$$

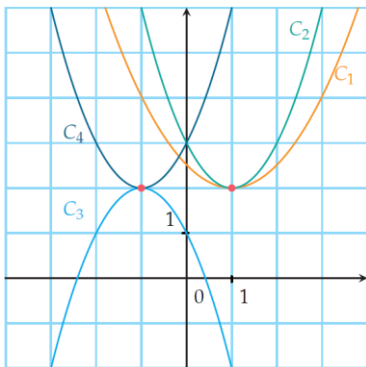
En utilisant la forme la plus adaptée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :

- 1) Résoudre $f(x) = 0$.
- 2) Résoudre $f(x) = 6,25$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 2

Associer les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 des fonctions du second degré suivantes à leur forme canonique en justifiant.

- 1) $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2$
- 2) $f_2(x) = -(x + 1)^2 + 2$
- 3) $f_3(x) = (x + 1)^2 + 2$
- 4) $f_4(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$



Exercice 3

Résoudre les équations suivantes.

- a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
- b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$
- c) $9x^2 - 18x + 9 = 0$

d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice 4

Déterminer, lorsque cela est possible, une expression factorisée des trinômes de degré 2 suivants :

- a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
- b) $g(x) = 3x^2 - x + 7$
- c) $h(x) = -8x^2 + 40x - 50$

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- a) $x^2 + x - 2 > 0$
- b) $-3x^2 + x - 2 \leq 0$
- c) $2x^2 + 3x \geq 0$
- d) $2x^2 - 8 < 0$

Problème 1

Une entreprise produit de la pâte à papier.

On note q la masse de pâte produite, exprimée en tonnes, avec $q \in [0; 60]$.

Le coût de production, en euros, pour une quantité produite q est

$$C(q) = q^2 + 632q + 1075.$$

L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte.

- a) Déterminer le prix de vente à la tonne.
- b) En déduire l'expression du bénéfice en fonction de q .
- c) Dans quel intervalle doit se situer la production pour que l'activité soit rentable ?

Dérivation : Rappels de cours

➤ Nombre dérivé et tangente :

Par définition, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (lorsque cette limite existe **et** est finie)

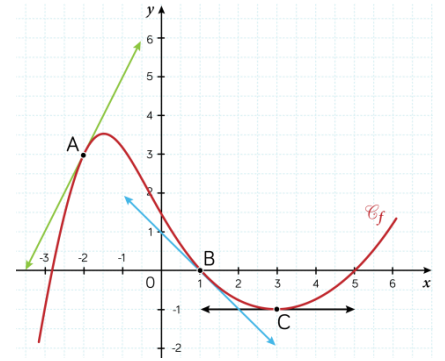
$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

On retiendra en particulier « **dérivée nulle : tangente horizontale** ».

Dans l'exemple ci-contre, $f'(3) = 0$, $f'(-2) = 2$ et $f'(1) = -1$.

L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



➤ Dérivées des fonctions usuelles

Fonction usuelle	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$ avec k un nombre réel fixé	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [= \mathbb{R}^*$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty [$	$] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

➤ Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$, alors :

- La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$
- La fonction $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$
- La fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$ **!/!** $(uv)' \neq u' + v'!$

Soient u et v des fonctions dérivables sur I avec v ne s'annulant pas sur I , alors :

- La fonction $\frac{1}{v} : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- La fonction $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

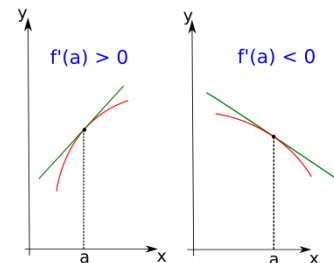
Soit m et p deux réels et g une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $mx + p \in I$.

La fonction f définie par $f(x) = g(mx + p)$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = m g'(mx + p)$$

➤ Signe de la dérivée et variations de la fonction

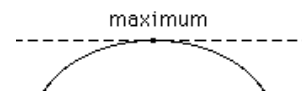
- 1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .
- 2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I .
- 3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .



Pour déterminer les variations d'une fonction f :

- On calcule la dérivée $f'(x)$
- On étudie le signe de $f'(x)$
- On dresse le tableau de variations de f

➤ Extrema d'une fonction



Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Si a est un réel de l'intervalle I mais qui n'est pas une borne de I et si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet localement un extremum en a qui est $f(a)$: on parle d'extremum local.

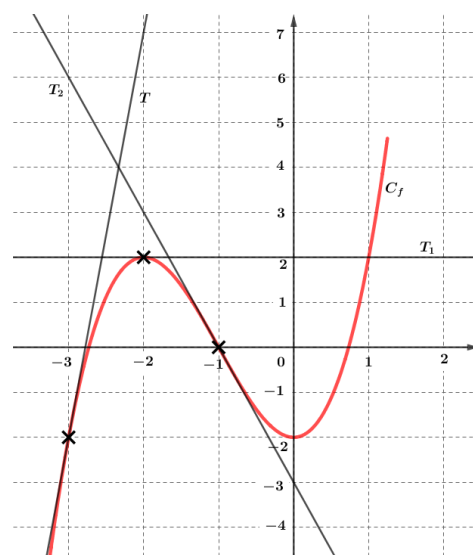
Exercices dérivation

Exercice 1

Sur le graphique ci-contre, C_f est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $[-3,25; 1,25]$.

T est sa tangente au point d'abscisse -3 et T_1 sa tangente au point d'abscisse -2 et T_2 sa tangente au point d'abscisse -1 .

- 1) Lire les valeurs de :
 - a. $f(-3)$ et $f'(-3)$.
 - b. $f(-2)$ et $f'(-2)$.
 - c. $f(-1)$ et $f'(-1)$.
- 2) Donner les équations de T ; T_1 et T_2 .
- 3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?
- 4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?



Exercice 2

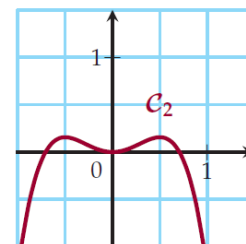
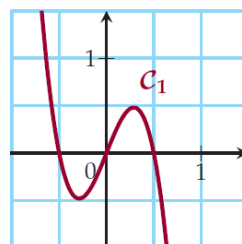
Déterminer, en détaillant vos calculs, la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- 1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x^2 + 1$
- 2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3(x + 2)$
- 3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x^4}$
- 4) Soit l la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $l(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

Exercice 3

Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f' .

Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

- 1) Déterminer $f'(x)$.
- 2) Etudier le signe de $f'(x)$.
- 3) En déduire le tableau de variations de f .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 5

Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :

- 1) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.
- 2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- 3) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Problème 2

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Soit \mathcal{D} la courbe représentative de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x - 2$.

Soit h est la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(x) - g(x)$.

- 1) Déterminer $h'(x)$.
- 2) Etudier le signe de $h'(x)$.
- 3) En déduire le tableau de variations de h .
- 4) En déduire les positions relatives des courbes C_f et \mathcal{D} sur $[0; +\infty[$.

Suites : Rappels de cours

➤ Deux modes de génération d'une suite :

▪ Formule explicite $u_n = f(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Exemple : $u_n = n^2 - 3n$ alors $u_7 = 7^2 - 3 \times 7 = 28$

▪ Par récurrence $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \geq 0$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$; $u_2 = 2 \times 7 - 3 = 11$; ...

➤ Sens de variation d'une suite :

La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que (u_n) est **monotone** si elle est croissante (ou décroissante) à partir de son 1^{er} terme.

Pour montrer qu'une suite est monotone, **on calcule** $u_{n+1} - u_n$ puis on étudie son signe.

➤ Suites arithmétiques :

$u_{n+1} = u_n + r$ r est la raison

$u_n = u_0 + nr$ Exemple : $u_n = 50 + 3n$ suite arithmétique de raison 3 et de terme initial 50

$u_n = u_1 + (n - 1)r$ dans le cas où le premier terme de la suite est u_1

Exemple : soit une suite arithmétique de raison 5 telle que $u_1 = 20$. Alors $u_{10} = u_1 + 9r = 65$.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = $\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

En particulier, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

➤ Suites géométriques :

$u_{n+1} = q \times u_n$ q est la raison

$u_n = u_0 \times q^n$ Exemple : $u_n = 4 \times 1,5^n$ suite géométrique de raison 1,5 et de terme initial 4

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ dans le cas où le premier terme est u_1

Pour montrer qu'une suite est géométrique, **on exprime** u_{n+1} et on montre que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : $\sum_{i=p}^n u_i = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

En particulier, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

➤ Comportement à l'infini : suite convergente, suite divergente

(u_n) **converge vers** ℓ lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de ℓ lorsque n devient très grand.

(u_n) **diverge** lorsqu'elle ne converge pas (soit elle n'a pas de limite, soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercices suites

Exercice 1

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n
par : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Calculer u_5 .

Exercice 2

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n
par : $u_n = (n + 5)^2 + 2$.

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite.
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- 3) Etablir le sens de variation de la suite (u_n) en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 3

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n
par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3 .

Exercice 4

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n
par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3 .

Exercice 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 16$.

- 1) Exprimer u_n en fonction de n .
- 2) Calculer u_6 .

Exercice 6

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n
par : $u_n = n^2 + 4n$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 7

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n
par : $u_n = 4n + 7$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.

- 1) Calculer la raison de cette suite.
- 2) Quel est le sens de variation de cette suite ?
- 3) Calculer u_{50} .

Exercice 9

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

- 1) Exprimer u_n en fonction de n .
- 2) Calculer u_3 .

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5 .

Exercice 11

Les premiers termes d'une suite sont : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $u_2 = 3$.

Cette suite peut-elle être géométrique ?

Exercice 12

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 480$ et de raison $\frac{1}{2}$.

- 1) Calculer v_2, v_3 et v_4 .
- 2) Pour tout entier naturel n , donner l'expression de v_n en fonction de n .
- 3) Etudier le sens de variation de la suite (v_n) .

Problème 3

Un commercial très compétent, arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Il a commencé son travail en décembre 2015, avec 20 ventes réussies.

Soit la suite (v_n) telle que v_n représente le nombre de Smartphones vendus le mois n de l'année 2016.

On définit $v_0 = 20$.

- 1) Calculer v_1, v_2 et v_3 .
- 2) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier correctement votre réponse.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n et de v_0 .
- 4) A partir de quel mois vend-il plus de 200 Smartphones par mois ?

Problème 4

Un propriétaire propose à partir du 1^{er} janvier 2015 un appartement dont le montant annuel initial du loyer est 4 500 €. Ce propriétaire augmente le loyer annuel chaque année de 3%.

On désigne par Q_n le montant annuel du loyer pour l'année (2015+n) ; on a donc $Q_0 = 4\,500$.

a) Calculer Q_1 et Q_2 .

b) Donner la nature de la suite (Q_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.

c) Exprimer Q_n en fonction de n .

d) En quelle année le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ? (à l'aide de la calculatrice).

Fonction exponentielle : Rappels de cours

➤ Définition

L'unique fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} tel que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp** : $x \mapsto \mathbf{exp}(x)$

$\mathbf{exp}(1) = e$. Une valeur approchée de ce nombre est **2,718**.

Pour tous les nombres réels x on note $\mathbf{exp}(x) = e^x$.

➤ Propriétés algébriques

Pour tous les réels x et y et pour tout entier relatif n :

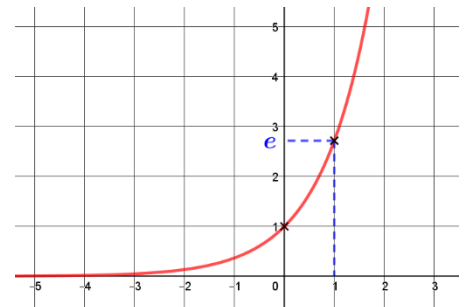
$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^x > 0 \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

Pour tous les réels a , la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a .

➤ Etude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variation de exp				



➤ Equations et inéquations

Pour tous réels x et y :

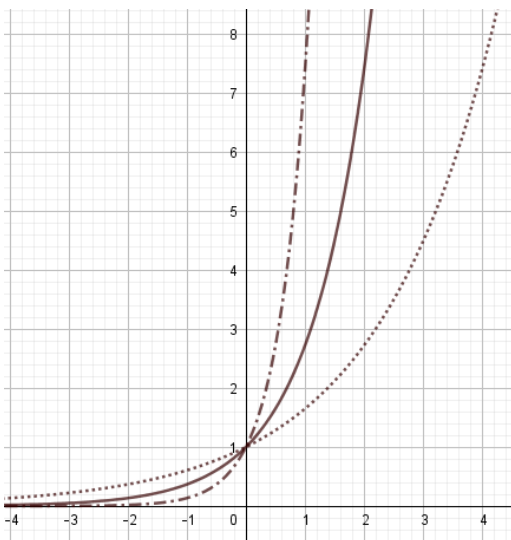
$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad \text{en particulier} \quad e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y \quad \text{en particulier} \quad e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{La fonction exp est strictement croissante}$$

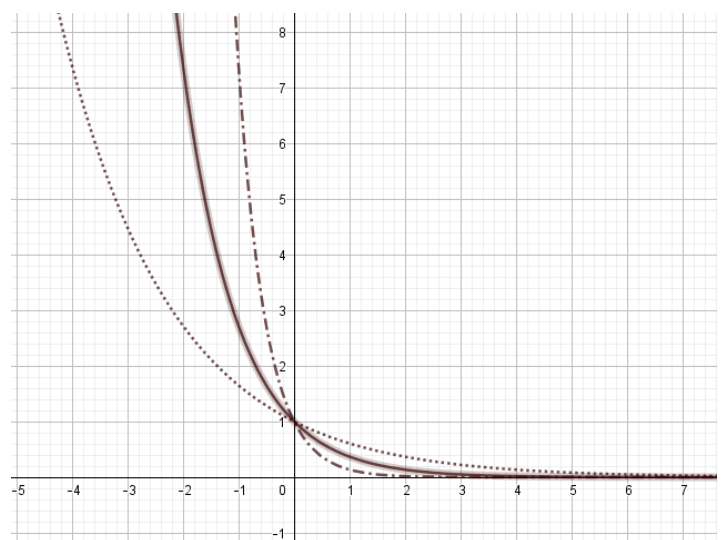
➤ Fonction $x \mapsto \mathbf{exp}(ax + b)$

Soient a et b sont des nombres réels, la fonction $g : x \mapsto \mathbf{exp}(ax + b)$ est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout nombre réel x , $g'(x) = a \mathbf{exp}(ax + b)$

Pour tout x réel, $g(x) = e^{kx}$ avec $k > 0$



Pour tout x réel, $h(x) = e^{-kx}$ avec $k > 0$



Exercices fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un nombre réel.

a) $e^x \times e^{3x-1}$

b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}}$

c) $(e^{5x})^3$

d) $(e^x - 1)(e^x + 1)$

e) $\frac{e^{-x} \times e^{9x}}{e^{3x}}$

f) $e^x \times e^{5x-2} \times e$

g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x$

h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2}$

Exercice 2

Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.

b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}}$.

c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x-7} = -2$

b) $(e^x)^2 - 1 = 0$

c) $e^{-3x+8} = e^{-5}$

d) $e^{x^2} - e = 0$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^x > e$

2) $e^{-3x+1} \geq e^4$

3) $e^{7x-21} < 1$

4) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leq 0$

5) $e^x \leq 0$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$

b) $g : x \mapsto xe^{5x}$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^{x+1}}$

d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^{x+3}}$

Probabilités : Rappels de cours

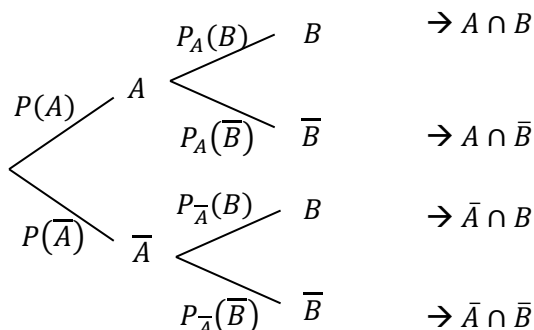
On considère une loi de probabilité P définie sur un univers fini Ω .

➤ Probabilités conditionnelles

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- La probabilité de B sachant A est : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

➤ Représentation à l'aide d'un arbre ou d'un tableau



	B	\bar{B}	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

1) La somme des probabilités des branches issues d'un même événement est toujours égale à 1.

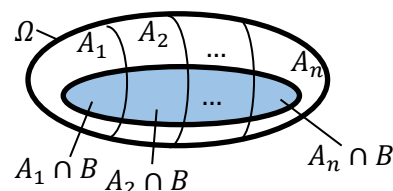
2) La probabilité de $A \cap B$ est obtenue en multipliant les probabilités le long des branches aboutissant à B et passant par A .

➤ Formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, \dots, A_n constitue **une partition de l'univers Ω** et $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors, pour tout événement B , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \text{ soit :}$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$



➤ Indépendance de deux événements

- On dit que les événements A et B sont **indépendants** si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Lorsque $P(A) \neq 0$, on a : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

➤ Variable aléatoire

- **Définition** : Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω . Une **variable aléatoire**, notée X , est une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , qui à chaque issue de Ω , associe un nombre réel.
- Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω . Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. On définit la **loi de probabilité** de X quand à chaque valeur x_i ($1 \leq i \leq n$), on associe la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

On peut donc établir le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$...	$P(X = x_n)$

- L'**espérance** de la variable aléatoire X , notée $E(X)$, est le nombre réel défini par :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

- La **variance** de la variable aléatoire X , notée $V(X)$, est le nombre réel défini par :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X , notée $\sigma(X)$, est le nombre réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercices probabilités

Exercice 1

Une association sportive organise une grande loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2 000.

Parmi tous ces billets :

- Un billet rapporte un lot de 1 200 € (*c'est le gros lot*).
- Quatre billets rapportent chacun un lot de 200 €.
- Dix billets rapportent chacun un lot de 50 €.
- Tous les autres billets ne rapportent rien.

Le prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.

X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.

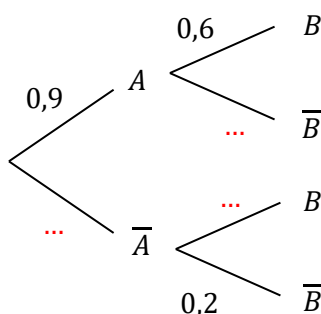
- 1) Donner la loi de probabilité de X ?
- 2) Déterminer l'espérance $E(X)$, arrondie au centième, puis interpréter la valeur obtenue.
- 3) Au lieu de rapporter 1 200 €, combien doit rapporter le gros lot afin que le jeu soit équitable ?

Exercice 2

On considère l'arbre pondéré ci-contre.

Le compléter puis calculer :

- 1) $P(A \cap B)$.
- 2) $P(B)$.
- 3) $P(A \cup B)$.
- 4) $P_B(A)$. On arrondira à 10^{-2} .



Exercice 3

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

Le livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants : H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,

H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,

H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,

C : « l'arbre choisi est un conifère »

F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

- a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .
- c. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
- d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ?
On arrondira à 10^{-3} .

Exercices second degré

Exercice 1

$$1) f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \text{ ou } x-1 = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 1 \Leftrightarrow S = \{-4; 1\}$$

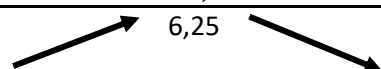
$$2) f(x) = 6,25 \Leftrightarrow -(x+1,5)^2 + 6,25 = 6,25 \Leftrightarrow -(x+1,5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1,5)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1,5 = 0$$

$$f(x) = 6,25 \Leftrightarrow x = -1,5 \Leftrightarrow S = \{-1,5\}$$

3) f est une fonction polynôme de degré 2 telle que : $f(x) = -(x+1,5)^2 + 6,25$ avec $a = -1$; $\alpha = -1,5$ et $\beta = 6,25$.

Comme $a = -1 < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1,5]$ et strictement décroissante sur $[-1,5 ; +\infty[$ et f admet un maximum $\beta = 6,25$ atteint en $x = -1,5$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
Variations de f			
		6,25	

Exercice 2

Dans chaque cas, on a l'écriture $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

° On regarde si la parabole est tournée vers le haut ($a > 0$) ou vers le bas ($a < 0$). C_3 est la seule tournée vers le bas et f_2 a pour coefficient a le nombre -1 . Donc **C_3 représente f_2** .

° Le sommet de la parabole est $S(\alpha ; \beta)$. Pour f_3 , on obtient $S_3(-1 ; 2)$. C'est donc **C_4 qui représente f_3** .

° Pour les deux paraboles restantes, le sommet est le même (de coordonnées $(-1 ; 2)$) ; il faut donc les distinguer autrement, par exemple en calculant $f(0)$: $f_1(0) = 3$. C'est donc **C_2 qui représente f_1** . On en déduit que **C_1 représente f_4** .

Remarque : il y a d'autres façons de faire ; on peut, par exemple, calculer l'image de 0,5 par chacune des fonctions et regarder quelle courbe passe par le point de coordonnées $(0,5 ; f(0,5))$

Exercice 3

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$2x^2 + 3x - 5$ est un trinôme et **1** en est une racine évidente.

En utilisant le produit des racines, $P = \frac{c}{a} \Leftrightarrow 1 \times x_2 = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -2,5$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2,5; 1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -2,5 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad S = \{-2,5 ; 1\}.$$

b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-5) \times (-4) = 49 - 80 = -31.$$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution réelle $S = \emptyset$.

$$c) \quad 9x^2 - 18x + 9 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3} = 1.$$

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 9 \times 9 = 324 - 324 = 0.$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2 \times 9} = \frac{18}{18} = 1.$

Ou méthode avec racine évidente : $9x^2 - 18x + 9$ est un trinôme et **1** en est une racine évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = 1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{9} = 1$ donc $x_2 = 1.$ $S = \{1\}.$

$$d) \quad x^2 + 3x + 2 = 0$$

$x^2 + 3x + 2$ est un trinôme et **-1** en est une racine évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = -1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$, donc $x_2 = -2.$

Ainsi l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2; -1\}.$

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-3 - 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-3 + 1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \quad S = \{-2; -1\}.$$

Exercice 4

$$a) \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49.$$

$\Delta > 0$, donc $f(x)$ est factorisable et s'écrit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{3 - 7}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Donc $f(x) = (x + 2)(x - 5).$

$$b) \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 1 - 84 = -83. \Delta < 0, \quad g(x) \text{ ne se factorise pas.}$$

$$c) \quad \Delta = 40^2 - 4 \times (-8) \times (-50) = 1600 - 1600 = 0$$

$\Delta = 0$, donc $h(x)$ est factorisable et s'écrit $h(x) = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2 \times (-8)} = \frac{-40}{-16} = 2,5.$

Donc $h(x) = -8(x - 2,5)^2$

Exercice 5

Méthode : On calcule Δ , on cherche les racines éventuelles, on fait le tableau de signes et on lit les solutions de l'inéquation dans le tableau.

1) $\Delta = 9$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$; signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 1$) ;
 $s_1 =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

2) $\Delta = -23$; le trinôme n'a pas de racine; il a le signe de a pour tout réel x .
 $a = -3$, donc, pour tout x , $-3x^2 + x - 2 \leq 0.$ $s_2 =]-\infty ; +\infty[$

3) Par factorisation (ou calcul de Δ) : $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$;

signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ; $s_3 =]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [0 ; +\infty[$

4) $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2.$ signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ;
 $s_4 =]-2 ; 2[$

Problème 1

a) « L'entreprise vend toute sa production avec un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte. »

Donc le prix de vente à la tonne est donné par :

$$\frac{C(25)}{25} = \frac{25^2 + 632 \times 25 + 1075}{25} = \frac{625 + 15800 + 1075}{25} = \frac{17500}{25} = 700. \quad \text{Le prix de vente à la tonne est 700 €.}$$

b) Soit $B(q)$ l'expression du bénéfice en fonction de q , avec $q \in [0 ; 60]$.

$$B(q) = R(q) - C(q) = 700q - (q^2 + 632q + 1075) = 700q - q^2 - 632q - 1075$$

$$B(q) = -q^2 + 68q - 1075$$

c) Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation $B(q) > 0$ c'est-à-dire $-q^2 + 68q - 1075 > 0$

$\Delta = 68^2 - 4 \times (-1) \times (-1075) = 324$, $\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$q_1 = \frac{-68 - \sqrt{324}}{2 \times (-1)} = \frac{-68 - 18}{-2} = \frac{86}{2} = 43 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-68 + \sqrt{324}}{2 \times (-1)} = \frac{-68 + 18}{-2} = \frac{50}{2} = 25.$$

Un trinôme est du signe de a , à l'extérieur des racines.

B admet donc le tableau de signes suivant :

q	0	25	43	60	
Signe de $B(q)$	-	0	+	0	-

Ainsi, les solutions de l'inéquation $-q^2 + 68q - 1075 > 0$

sont : $S =]25 ; 43[$

Pour que l'activité soit rentable, la production de pâte à papier doit donc être comprise entre 25 et 43 tonnes.

Exercices dérivation

Exercice 1

- 1) a. $f(-3) = -2$ et $f'(-3) = 9$.
b. $f(-2) = 2$ et $f'(-2) = 0$.
c. $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = -3$.

2) L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -3 est :

$$y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3) \Leftrightarrow y = 9(x + 3) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 27 - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 25$$

L'équation réduite de la tangente T_1 à C_f au point d'abscisse -2 est :

$$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) \Leftrightarrow y = 0(x + 2) + 2 \Leftrightarrow y = 2 \quad [\text{On trouve bien une droite horizontale}]$$

L'équation réduite de la tangente T_2 à C_f au point d'abscisse -1 est :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \Leftrightarrow y = -3(x + 1) + 0 \Leftrightarrow y = -3x - 3$$

- 3) Le nombre dérivé est négatif sur $] -2 ; 0[$ (car f est décroissante sur cet intervalle)
4) Le nombre dérivé est positif sur $] -\infty ; -2[$ et sur $]0 ; +\infty[$ (car f est croissante sur ces intervalles)

Exercice 2

- 1) $f'(x) = 6x$
2) $g'(x) = 4x^3 + 6x^2$
3) $h'(x) = -\frac{4}{x^5}$
4) $i'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$

Exercice 3

On utilise le théorème du cours liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

° C_1 est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $] -\infty ; -0,5]$ et sur $[0 ; 0,5]$ donc f_1 est positive sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est croissante sur ces intervalles.

° C_1 est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-0,5 ; 0]$ et sur $[0,5 ; +\infty[$ donc f_1 est négative sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est décroissante sur ces intervalles.

On peut donc en conclure que C_2 représente f et C_1 représente f' .

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

1) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

2) .

$$\Delta = 16 \text{ donc } \Delta > 0 \text{ et il y a deux racines : } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{1}{3}$$

Le trinôme $3x^2 + 2x - 1$ a le signe de a ($a = 3$) « à l'extérieur des racines ».

3)

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
variations de f					

4) $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15$

L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \Leftrightarrow y = 15(x - 2) + 10 \Leftrightarrow y = 15x - 30 + 10 \Leftrightarrow y = 15x - 20$$

Exercice 5

1) $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ f est décroissante sur $]0; \frac{1}{3}]$ et croissante sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$

2) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ f est décroissante sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$ et f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $]1; +\infty[$

3) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $]0; +\infty[$

Problème 2

1) $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

2) et 3)

$$h'(x) \text{ s'annule pour : } 3(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0$$

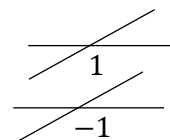
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
Signe de $x - 1$	-	0	+	+	
Signe de $x + 1$	-	-	0	+	
Signe de $h'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de h					

$m > 0$ donc

$m > 0$ donc



Pour tout $x \in [0; 1[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de \mathcal{D} .

Pour tout $x \in]1; +\infty[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de \mathcal{D} .

Pour $x = 1$: $h(1) = f(1) - g(1) = 0$, donc $f(1) = g(1)$ et C_f et \mathcal{D} sont sécantes au point d'abscisse 1.

Exercices suites

Exercice 1 $u_5 = \frac{2 \times 5 + 1}{5 + 1} = \frac{11}{6}$

Exercice 2

1) $u_0 = (0 + 5)^2 + 2 = 27$ $u_1 = (1 + 5)^2 + 2 = 38$ $u_2 = (2 + 5)^2 + 2 = 51$

2) $u_{n+1} = ((n + 1) + 5)^2 + 2 = (n + 6)^2 + 2 = n^2 + 12n + 36 + 2 = n^2 + 12n + 38$

3) $u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - (n + 5)^2 - 2 = n^2 + 12n + 38 - (n^2 + 10n + 25) - 2 = 2n + 11$
 $u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - n^2 - 10n - 25 - 2 = 2n + 11$

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 2n + 11 \geq 11 > 0$

Ainsi, pour entier naturel n , $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

$u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$

$u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

$u_3 = 2 \times u_2 - 4 = 2 \times 0 - 4 = -4$

Exercice 4

$u_1 = \frac{4}{3}$; $u_2 = \frac{7}{4}$; $u_3 = \frac{11}{7}$

Exercice 5

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 16 + 4n$.

2) $u_6 = 16 + 4 \times 6 = 16 + 24 = 40$.

Exercice 6

On calcule les trois premiers termes :

$u_0 = 0$ $u_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 1 + 4 = 5$ $u_2 = 2^2 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12$

Calculons les différences :

$u_1 - u_0 = 5 - 0 = 5$ $u_2 - u_1 = 12 - 5 = 7$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 4(n + 1) + 7 - (4n + 7) = 4n + 4 + 7 - 4n - 7 = 4$

Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4 \times 0 + 7 = 7$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r$$

$$u_{20} = 28 \Leftrightarrow u_0 + 20r = 28 \Leftrightarrow u_0 = 28 - 20r$$

$$\text{Ainsi, } 9 - 5r = 28 - 20r \Leftrightarrow -5r + 20r = 28 - 9 \Leftrightarrow 15r = 19 \Leftrightarrow r = \frac{19}{15}$$

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{19}{15} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

3) **Méthode 1** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r = 9 - 5 \times \frac{19}{15} = 9 - \frac{19}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Donc } u_{50} = \frac{8}{3} + 50 \times \frac{19}{15} = 66.$$

Méthode 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n - p)r$

$$u_{50} = u_5 + (50 - 5) \frac{19}{15} = 9 + 45 \times \frac{19}{15} = 66$$

Exercice 9

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 2 \times 3^n$

$$2) u_3 = u_0 q^3 = 2 \times 3^3 = 54.$$

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.

Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 7 \times q^n$

$$u_2 = 28 \Leftrightarrow 7 \times q^2 = 28 \Leftrightarrow q^2 = \frac{28}{7} = 4$$

Comme q est positif on en déduit que $q = \sqrt{4} = 2$

$$u_5 = 7 \times 2^5 = 224$$

Exercice 11

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} = 1,5$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 12

$$1) v_2 = v_1 \times q = 480 \times \frac{1}{2} = 240 ; v_3 = 120 ; v_4 = 60.$$

$$2) \text{ Pour tout entier naturel } n, v_n = v_1 \times q^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} 3) v_{n+1} - v_n &= 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

or $-240 < 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$ (car $\frac{1}{2} > 0$ et ses puissances aussi).

Donc, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite est décroissante.

Problème 3

- 1) $v_1 = v_0 + 15 = 20 + 15 = 35$; $v_2 = v_1 + 15 = 35 + 15 = 50$; $v_3 = v_2 + 15 = 50 + 15 = 65$
- 2) v_{n+1} représente le nombre de Smartphones vendus le mois $n + 1$ de l'année 2016 or ce commercial arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Donc : $v_{n+1} = v_n + 15$.
Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$.
- 3) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$ donc :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$
$$\boxed{v_n = 20 + 15n}$$
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n > 200 \Leftrightarrow 20 + 15n > 200 \Leftrightarrow 15n > 180 \Leftrightarrow n > \frac{180}{15} \Leftrightarrow n > 12$
Donc à partir du mois de janvier 2017 il vend plus de 200 Smartphones par mois.

Problème 4

- a) $Q_1 = 4\,500 \times 1,03 = 4\,635 \text{ €}$ et $Q_2 = 4\,635 \times 1,03 = 4\,774,05 \text{ €}$.
- b) La suite (Q_n) est une **suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de terme initial $Q_0 = 4\,500$** .
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = Q_0 \times q^n$, donc $Q_n = 4\,500 \times 1,03^n$.
- d) On cherche le plus petit entier N tel que $4\,500 \times 1,03^N > 9\,000$. On trouve $N = 24$.
 $2015 + 24 = 2039$ donc le loyer dépassera le double du loyer initial en 2039.

Exercices fonction exponentielle

Exercice 1

- a) $e^x \times e^{3x-1} = e^{x+3x-1} = e^{4x-1}$
b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e^{-x-(4-x)} = e^{-x-4+x} = e^{-4}$
c) $(e^{5x})^3 = e^{5x \times 3} = e^{15x}$
d) $(e^x - 1)(e^x + 1) = (e^x)^2 - 1^2 = e^{2x} - 1$
e) $\frac{e^{-x} \times e^{9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{-x+9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{8x}}{e^{3x}} = e^{8x-3x} = e^{5x}$
f) $e^x \times e^{5x-2} \times e = e^{x+5x-2+1} = e^{6x-1}$
g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x = e^{-x-(7-x)} \times e^x = e^{-x-7+x+x} = e^{-7+x}$
h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{x+4}}{e^{6x}} = e^{x+4-6x} = e^{-5x+4}$

Exercice 2

- a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-7n}$. donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-7}$ et de premier terme $u_0 = e^{-7 \times 0} = e^0 = 1$.
- b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{-2n+7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{5n}}{e^{3n}} = e^{5n-3n} = e^{2n}$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{2 \times 0} = e^0 = 1$.
- c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = (e^{-4n})^{-2} = e^{-4n \times (-2)} = e^{8n}$, donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = e^8$ et de premier terme $w_0 = e^{8 \times 0} = e^0 = 1$.

Exercice 3

- a) $e^{3x-7} = -2$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x-7} > 0$ donc $S = \emptyset$.
- b) $(e^x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $S = \{0\}$.
- c) $e^{-3x+8} = e^{-5} \Leftrightarrow -3x + 8 = -5 \Leftrightarrow -3x = -13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$ donc $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$.
- d) $e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ donc $S = \{-1; 1\}$.

Exercice 4

- a) $e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]1; +\infty[$.
- b) $e^{-3x+1} \geq e^4 \Leftrightarrow -3x + 1 \geq 4$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $\Leftrightarrow -3x \geq 3$
 $\Leftrightarrow x \leq -1$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -1]$.
- c) $e^{7x-21} < 1 \Leftrightarrow e^{7x-21} < e^0 \Leftrightarrow 7x - 21 < 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $\Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; 3[$.

$$d) e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leq 0 \Leftrightarrow e^{-2x+5} \leq e^{8x-3} \Leftrightarrow -2x + 5 \leq 8x - 3 \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow -2x - 8x \leq -5 - 3 \Leftrightarrow -10x \leq -8 \Leftrightarrow x \geq 0,8 \quad \text{car on divise par } -10 \text{ négatif ce qui renverse l'ordre}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [0,8; +\infty[$

$$e) e^x \leq 0 \quad \text{or pour tout } x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0 \quad \text{donc } S = \emptyset.$$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

$$a) f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$$

f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et $f'(x) = 4e^{4x+1} - 4 = 4(e^{4x+1} - 1)$, pour tout réel x .

On obtient le signe de $f'(x)$ en résolvant l'inéquation $4(e^{4x+1} - 1) \geq 0$.

$$4(e^{4x+1} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geq e^0 \Leftrightarrow 4x + 1 \geq 0 \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{4}$$

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{4}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

$$f\left(\frac{-1}{4}\right) = e^{4 \times \frac{-1}{4} + 1} - 4 \times \left(\frac{-1}{4}\right) + 7 = 1 + 1 + 7 = 9$$

$$b) g : x \mapsto xe^{5x}$$

g est de la forme $u \times v$ avec, pour tout réel x , $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$

g est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

$$\text{Pour tout réel } x, \quad u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = e^{5x}$$

$$\text{Donc} \quad u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 5e^{5x}$$

$$\text{Et } g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 1 \times e^{5x} + 5e^{5x} \times x = (5x + 1)e^{5x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{5x} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $5x + 1$ sur \mathbb{R} .

$$\text{Or } 5x + 1 > 0 \Leftrightarrow 5x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de g			

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}e^{5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{1}{5}e^{-1}$$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

La fonction h est définie et dérivable sur \mathbb{R} . (car $e^x > 0$ pour tout x réels)

h est de la forme $\frac{1}{v}$ avec, pour tout réel x , $v(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$

Et $h'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-e^x < 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $h'(x)$ est strictement négative sur \mathbb{R} , et la fonction h est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$

k est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

k est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, pour tout réel x , $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x + 3$

$$u'(x) = e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x$$

Et $k'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x \times (e^x+3) - (e^x+1) \times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x+3-e^x-1) \times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+3)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$ et $(e^x + 3)^2 > 0$ ainsi $k'(x)$ est strictement positive sur \mathbb{R} , donc la fonction k est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exercices probabilités

Exercice 1

1) X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.

Cette variable aléatoire prend les valeurs :

-2 ; 48 ; 198 et $1\ 198$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i en €	-2	48	198	$1\ 198$
$p(X = x_i)$	$\frac{1985}{2000}$	$\frac{10}{2000}$	$\frac{4}{2000}$	$\frac{1}{2000}$

$$2) E(X) = \frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times 1198 = -\frac{3}{4}$$

Le gain moyen que peut espérer un joueur est de $-0,75$ €.

L'espérance est négative donc le jeu n'est pas favorable au joueur.

3) Soit x la somme rapportée par le gros lot. Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$

$$\text{c'est-à-dire } \frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } -\frac{2698}{2000} + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } x = \frac{2698}{2000} \times 2000 + 2 = 2700$$

Ainsi, le plus gros lot doit rapporter $2\ 700$ € pour que le jeu soit équitable.

Exercice 2

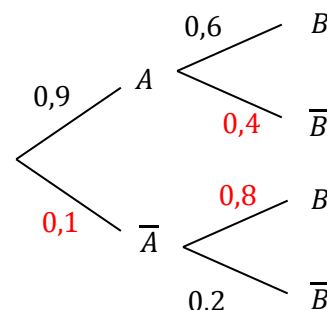
$$1) P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,9 \times 0,6 = 0,54$$

2) A et \bar{A} constitue une partition de l'univers Ω ,
donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) = 0,54 + 0,1 \times 0,8 = 0,54 + 0,08 = 0,62$$

$$3) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 + 0,62 - 0,54 = 0,98$$

$$4) P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,54}{0,62} \approx 0,87$$



Exercice 3

a. Voilà l'arbre pondéré traduisant la situation de l'exercice :

$$b. P(C \cap H_3) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12.$$

La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est de **0,12**.

c. H_1 , H_2 et H_3 constituent une partition de l'univers Ω ,
donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,12 = 0,525.$$

La probabilité de l'événement C est donc bien égale à **0,525**.

d. On cherche $P_C(H_1)$.

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$$

Sachant que l'arbre choisi est un conifère, la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 est donc environ égale à **0,533**.