

Livret pour la Terminale Spécialité de Mathématiques

Sommaire

➤ Quelques conseils	page 1
➤ Rappels : second degré	page 2
➤ Exercices : second degré	page 3
➤ Rappels : dérivation	page 4
➤ Exercices : dérivation	page 5
➤ Rappels : suites	page 6
➤ Exercices : suites	page 7
➤ Rappels : fonction exponentielle	page 8
➤ Exercices : fonction exponentielle	page 9
➤ Rappels : géométrie repérée, vecteurs et droites du plan	page 10
➤ Exercices : géométrie repérée, vecteurs et droites du plan	page 11
➤ Rappels : probabilités	page 12
➤ Exercices : probabilités	page 13
➤ Éléments de correction : exercices second degré	page 14
➤ Éléments de correction : exercices dérivation	page 16
➤ Éléments de correction : exercices suites	page 18
➤ Éléments de correction : exercices fonction exponentielle	page 20
➤ Éléments de correction : exercices géométrie repérée, vecteurs et droites du plan	page 22
➤ Éléments de correction : exercices probabilités	page 24

Ce livret met l'accent sur cinq thèmes fondamentaux pour la spécialité Mathématique de Terminale : second degré, dérivation, suites, fonction exponentielle et géométrie plane (avec les vecteurs et droites du plan). Un autre thème est assez important : les probabilités.

Pour chacun de ces thèmes :

- Connaître le cours (faire des fiches), revoir les exemples et les exercices du cours.
- Refaire les DS, les interrogations et les DM faits pendant l'année et faire **les exercices proposés dans ce document** d'abord sans aucune aide, puis si nécessaire avec l'aide du cours et, en dernier recours, de la correction.

Penser à l'aide qu'apporte la calculatrice : maîtriser la représentation graphique de fonctions, l'utilisation du menu statistiques, le calcul des termes d'une suite... Dès que possible, essayer de vérifier les réponses à l'aide de la calculatrice.

- Il est conseillé de faire une première fois les exercices de ce livret (début juillet), puis de les revoir, s'ils vous ont posé problème, en août.

- Il est conseillé de fractionner le travail (éviter les longues séances de révision : il est préférable de se concentrer par exemple 30 minutes sur un exercice, sans musique ni téléphone à portée de main). Certains de ces exercices sont difficiles, il est normal de ne pas savoir tout faire du premier coup !

- Il vous est conseillé de dédier un cahier à votre travail des vacances, en mathématiques ou dans d'autres matières. Vous pourrez ainsi le présenter à vos professeurs à la rentrée pour qu'ils puissent mesurer vos efforts. Notez aussi vos questions si vous en avez.

Les premiers chapitres de Terminale en spécialité Mathématique concerneront les suites et la dérivation : terminer les révisions par ces notions.

En fin de livret, on trouvera des éléments de correction.

Second degré : rappels de cours

➤ Un trinôme du second degré peut s'écrire sous deux formes :

- **forme développée :** $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **forme canonique :** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux réels.
- **forme factorisée éventuelle :** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines éventuelles.

➤ Somme et produit des racines :

Si f admet deux réels x_1 et x_2 pour racines, alors :

- La **somme** des racines est : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Le **produit** des racines est : $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

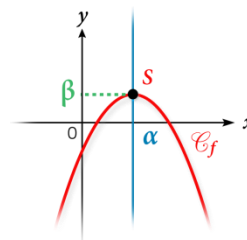
➤ Représentation graphique ; variations

La courbe représentant f est une **parabole** de sommet $S(\alpha ; \beta)$.

Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut. On en déduit les variations de f .

Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. On en déduit les variations de f .

La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.



➤ Équation du second degré

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) correspondent aux racines de f .

Méthode :

- Toujours essayer de repérer une factorisation (par un facteur commun ou une identité remarquable).
- Repérer une racine « évidente », puis calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines.
- Dans le cas où on ne remarque rien de particulier, on calcule le discriminant.

Signe de $\Delta = b^2 - 4ac$	Racines de f	Forme factorisée de f	Signe de $f(x)$	Courbe représentative de f											
				$a > 0$	$a < 0$										
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Signe de $f(x)$</td> <td>Signe de a</td> <td>Signe de $-a$</td> <td>Signe de a</td> <td>Signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	Signe de $f(x)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a	Signe de a		
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$											
Signe de $f(x)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a	Signe de a											
$\Delta = 0$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Signe de $f(x)$</td> <td>Signe de a</td> <td>0</td> <td>Signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	Signe de $f(x)$	Signe de a	0	Signe de a				
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$												
Signe de $f(x)$	Signe de a	0	Signe de a												
$\Delta < 0$	aucune	Ne se factorise pas	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Signe de $f(x)$</td> <td colspan="2">Signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	Signe de a							
x	$-\infty$	$+\infty$													
Signe de $f(x)$	Signe de a														

Exercices : second degré

Exercice 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

On admet que pour tout réel x on a :

$f(x) = -(x + 1,5)^2 + 6,25$ et pour tout réel x on a : $f(x) = -(x + 4)(x - 1)$.

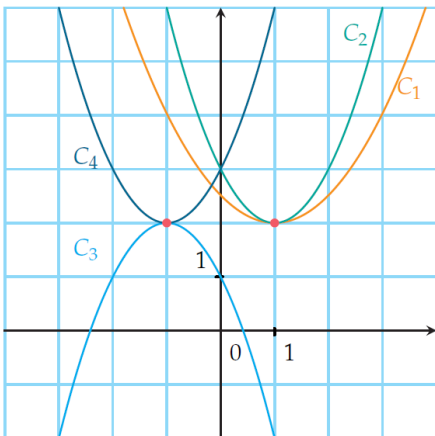
En utilisant la forme la plus adaptée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :

- 1) Résoudre $f(x) = 0$.
- 2) Résoudre $f(x) = 6,25$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 2

Associer les courbes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 des fonctions du second degré suivantes à leur forme canonique en justifiant.

- 1) $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2$
- 2) $f_2(x) = -(x + 1)^2 + 2$
- 3) $f_3(x) = (x + 1)^2 + 2$
- 4) $f_4(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$



Exercice 3

Résoudre les équations suivantes.

- a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
- b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$
- c) $9x^2 - 18x + 9 = 0$
- d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice 4

Déterminer, lorsque cela est possible, une expression factorisée des trinômes de degré 2 suivants :

- a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
- b) $g(x) = 3x^2 - x + 7$
- c) $h(x) = -8x^2 + 40x - 50$

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- a) $x^2 + x - 2 > 0$
- b) $-3x^2 + x - 2 \leq 0$
- c) $2x^2 + 3x \geq 0$
- d) $2x^2 - 8 < 0$

Problème 1

Une entreprise produit de la pâte à papier.

On note q la masse de pâte produite, exprimée en tonnes, avec $q \in [0; 60]$.

Le coût de production, en euros, pour une quantité produite q est

$$C(q) = q^2 + 632q + 1075.$$

L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte.

- a) Déterminer le prix de vente à la tonne.
- b) En déduire l'expression du bénéfice en fonction de q .
- c) Dans quel intervalle doit se situer la production pour que l'activité soit rentable ?

Dérivation : rappels de cours

➤ Nombre dérivé et tangente :

Par définition, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (si cette limite est un réel)

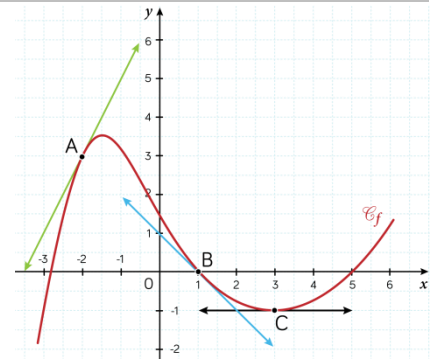
$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

On retiendra en particulier « **dérivée nulle : tangente horizontale** ».

Dans l'exemple ci-contre, $f'(3) = 0$, $f'(1) = -1$ et $f'(-2) = 2$.

L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



➤ Dérivées des fonctions usuelles

Fonction usuelle	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$, où k est un nombre réel fixé	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\{0\}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty [$	$] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

➤ Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$ alors :

- La fonction $ku: x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
- La fonction $u + v: x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- La fonction $uv: x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Soit u et v des fonctions dérivables sur I , v ne s'annulant pas sur I , alors :

- La fonction $\frac{1}{v}: x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- La fonction $\frac{u}{v}: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Soit m et p deux réels. Soit g une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $mx + p \in I$. La fonction $f: x \mapsto g(mx + p)$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = m g'(mx + p)$$

➤ Signe de la dérivée et variations

- 1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .
- 2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I .
- 3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

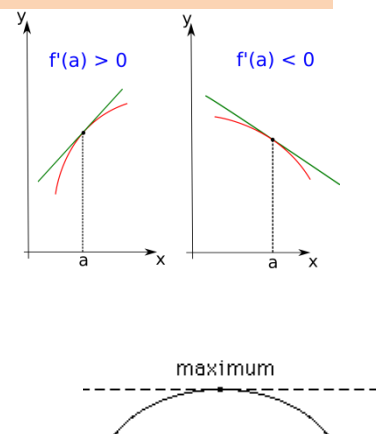
Pour déterminer les variations d'une fonction f :

- On calcule la dérivée $f'(x)$;
- On étudie le signe de $f'(x)$;
- On dresse le tableau de variations de f .

➤ Extrema d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Si a est un réel de l'intervalle I mais qui n'est pas une borne de I et si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet localement un extremum en a qui est $f(a)$: on parle d'extremum local.



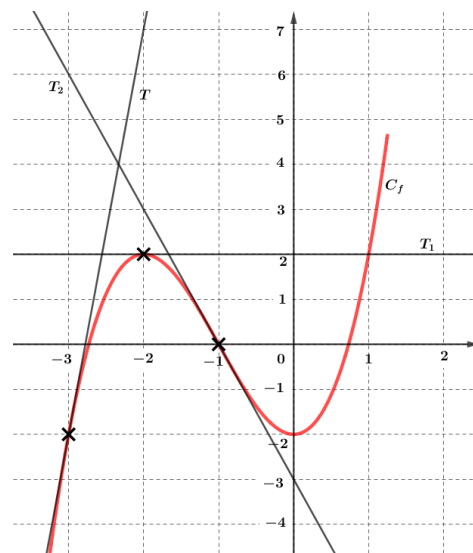
Exercices : dérivation

Exercice 1

Sur le graphique ci-dessous, C_f est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $[-3, 25; 1, 25]$.

T est sa tangente au point d'abscisse -3 et T_1 sa tangente au point d'abscisse -2 et T_2 sa tangente au point d'abscisse -1 .

- 1) Lire les valeurs de :
 - a. $f'(-3)$ et $f(-3)$.
 - b. $f'(-2)$ et $f(-2)$.
 - c. $f'(-1)$ et $f(-1)$.
- 2) Donner les équations de T ; T_1 et T_2 .
- 3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?
- 4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?



Exercice 2

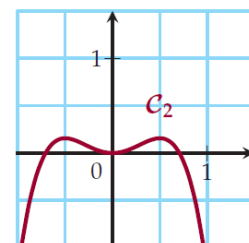
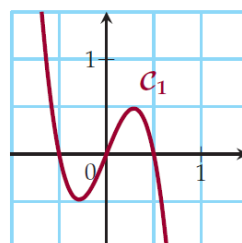
Déterminer, en détaillant vos calculs, la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- 1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 + 3$
- 2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3(x + 2)$
- 3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x^4}$
- 4) Soit l la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $l(x) = \frac{x+1}{x^2}$

Exercice 3

Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f' .

Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

- 1) Déterminer $f'(x)$.
- 2) Étudier le signe de $f'(x)$.
- 3) En déduire le tableau de variations de f .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 5

Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :

- 1) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.
- 2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- 3) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Problème 2

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Soit D la courbe représentative de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x - 2$.

Soit h est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

- 1) Déterminer $h'(x)$.
- 2) Étudier le signe de $h'(x)$.
- 3) En déduire le tableau de variations de h .

En déduire les positions relatives des courbes C_f et D sur $[0; +\infty[$.

Suites : rappels de cours

➤ Deux modes de génération d'une suite :

- Formule explicite $u_n = f(n)$ avec n entier naturel.

exemple : $u_n = n^2 - 3n$ alors $u_7 = 7^2 - 3 \times 7 = 28$

- Par récurrence $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

exemple : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$ alors $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$ $u_2 = 11 \dots$

➤ Sens de variation d'une suite :

La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que (u_n) est **monotone** si elle est croissante (ou décroissante) à partir de son 1^{er} terme.

Pour montrer qu'une suite est monotone, **on calcule** $u_{n+1} - u_n$ puis on étudie son signe.

➤ Suites arithmétiques :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad r \text{ est la raison}$$

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{exemple : } u_n = 50 + 3n \text{ suite arithmétique de raison 3 et de terme initial 50}$$

$$u_n = u_1 + (n - 1)r \quad \text{dans le cas où le premier terme de la suite est } u_1$$

exemple : soit une suite arithmétique de raison 5 telle que $u_1 = 20$. Alors $u_{10} = u_1 + 9r = 65$.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = $\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

$$\text{En particulier, } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

➤ Suites géométriques :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad q \text{ est la raison}$$

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{exemple : } u_n = 4 \times 1,5^n \text{ suite géométrique de raison 1,5 et de terme initial 4}$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \quad \text{dans le cas où le premier terme est } u_1$$

Pour montrer qu'une suite est géométrique, **on calcule** u_{n+1} et on montre que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : $\sum_{i=p}^n u_i = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

$$\text{En particulier, } 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

➤ Comportement à l'infini : suite convergente, suite divergente

(u_n) **converge vers** ℓ lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de ℓ lorsque n devient très grand.

(u_n) **diverge** lorsqu'elle ne converge pas (soit elle n'a pas de limite, soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercices : suite

Exercice 1

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Calculer u_5 .

Exercice 2

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = (n+5)^2 + 2$.

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite.
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- 3) Établir le sens de variation de la suite (u_n) en étudiant le signe de la différence

$$u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 3

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3 .

Exercice 4

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3 .

Exercice 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 16$.

- 1) Exprimer u_n en fonction de n .
- 2) Calculer u_6 .

Exercice 6

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2 + 4n$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 7

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 4n + 7$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.

- 1) Calculer la raison de cette suite.
- 2) Quel est le sens de variation de cette suite ?
- 3) Calculer u_{50} .

Exercice 9

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

- 1) Exprimer u_n en fonction de n .
- 2) Calculer u_3 .

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.

Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5 .

Exercice 11

Les premiers termes d'une suite sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$.

Cette suite peut-elle être géométrique ?

Exercice 12

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 480$ et de raison $\frac{1}{2}$.

- 1) Calculer v_2, v_3 et v_4 .
- 2) Pour tout entier naturel n , donner l'expression de v_n en fonction de n .
- 3) Étudier le sens de variation de la suite (v_n) .

Problème 3

Un commercial très compétent, arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Il a commencé son travail en décembre 2015, avec 20 ventes réussies.

Soit la suite (v_n) telle que v_n représente le nombre de Smartphones vendus le mois n de l'année 2016.

On définit $v_0 = 20$.

- 1) Calculer v_1, v_2 et v_3 .
- 2) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier correctement votre réponse.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n et de v_0 .
- 4) A partir de quel mois vend-il plus de 200 Smartphones par mois ?

Problème 4

Un propriétaire propose à partir du 1^{er} janvier 2015 un appartement dont le montant annuel initial du loyer est 4 500 €. Ce propriétaire augmente le loyer annuel chaque année de 3%.

On désigne par Q_n le montant annuel du loyer pour l'année $(2015+n)$; on a donc $Q_0 = 4 500$.

- a) Calculer Q_1 et Q_2 .
- b) Donner la nature de la suite (Q_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
- c) Exprimer Q_n en fonction de n .
- d) En quelle année le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ? (à l'aide de la calculatrice).

Fonction exponentielle rappels de cours

➤ Définition

L'unique fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} tel que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp** : $x \mapsto \mathbf{exp}(x)$

exp(1) = e. Une valeur approchée de ce nombre est **2,718**.

Pour tous les nombres réels x on note **exp(x) = e^x**.

➤ Propriétés algébriques

Pour tous les réels x et y et pour tout entier relatif n :

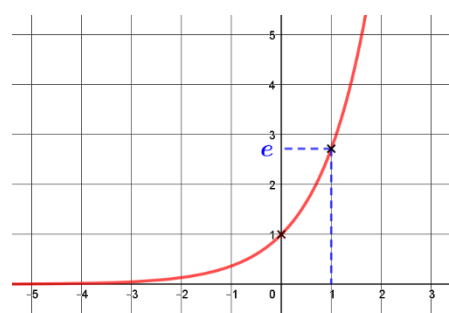
$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^x > 0 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^n = e^{nx}$$

Pour tous les réels a , la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison **e^a**.

➤ Étude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variation de exp				



➤ Équations et inéquations

Pour tous réels x et y :

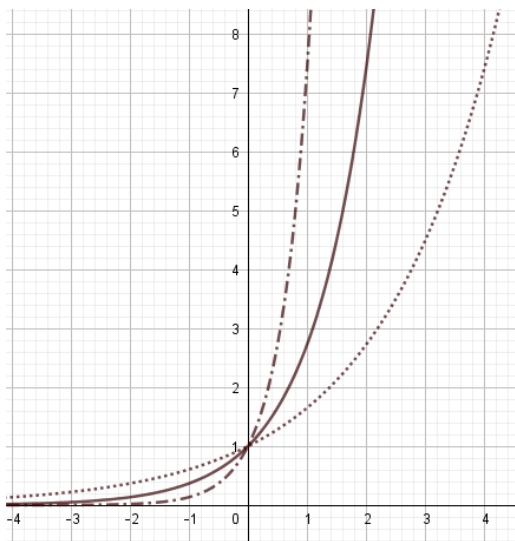
$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad \text{en particulier} \quad e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y \quad \text{en particulier} \quad e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

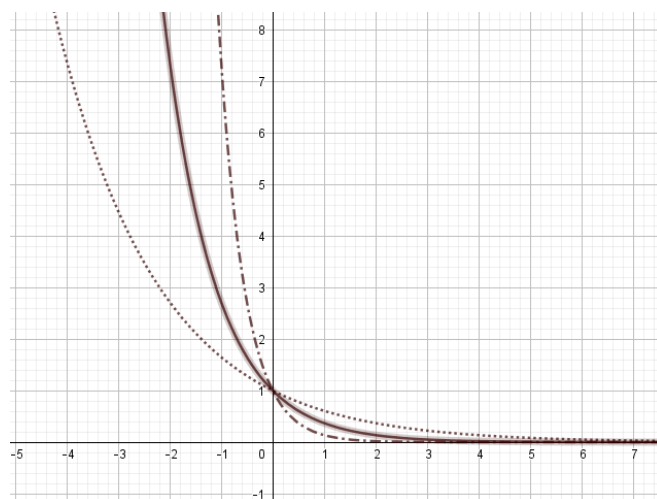
➤ Fonction $x \mapsto \mathbf{exp}(ax + b)$

Soient a et b sont des nombres réels, la fonction $g : x \mapsto \mathbf{exp}(ax + b)$ est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout nombre réel x , **$g'(x) = a \mathbf{exp}(ax + b)$**

Pour tout x réel, $g(x) = e^{kx}$,
avec k réel strictement positif.



Pour tout x réel, $h(x) = e^{-kx}$,
avec k réel strictement positif.



Exercices : fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un nombre réel.

- a) $e^x \times e^{3x-1}$
b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}}$
c) $(e^{5x})^3$
d) $(e^x - 1)(e^x + 1)$
e) $\frac{e^{-x} \times e^{9x}}{e^{3x}}$
f) $e^x \times e^{5x-2} \times e$
g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x$
h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2}$

Exercice 2

Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

- a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.
b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}}$.
c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

- a) $e^{3x-7} = -2$
b) $(e^x)^2 - 1 = 0$
c) $e^{-3x+8} = e^{-5}$
d) $e^{x^2} - e = 0$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $e^x > e$
2) $e^{-3x+1} \geq e^4$
3) $e^{7x-21} < 1$
4) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leq 0$
5) $e^x \leq 0$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

- a) $f: x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$
b) $g: x \mapsto xe^{5x}$
c) $h: x \mapsto \frac{1}{e^{x+1}}$
d) $k: x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$

Géométrie repérée : vecteurs et droites du plan - rappels de cours

Rappels : vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Caractérisation de la colinéarité

Dans un repère du plan, les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est à dire, si et seulement si leur déterminant est nul. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$.

Rappels : vecteurs orthogonaux :

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** s'ils ont des directions perpendiculaires.

Caractérisation de l'orthogonalité

Dans un repère du plan, les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 0$.

Rappels : vecteur directeur et vecteur normal d'une droite :

Soit d une droite et A et B deux points de la droite d .

Un vecteur directeur de la droite d est un vecteur \vec{u} , non nul, colinéaire au vecteur \overrightarrow{AB} .

Un vecteur normal de la droite d est un vecteur \vec{n} , non nul, orthogonal à un vecteur directeur de d .

Rappels : équation cartésienne d'une droite :

L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$ avec a, b, c des réels et $(a; b) \neq (0; 0)$ est **une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.**

Une équation d'une droite (d) de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite (d).

Rappels : équation réduite d'une droite :

- Toute droite du plan **non parallèle à l'axe des ordonnées** admet **une équation réduite** de la forme $y = mx + p$, où m et p sont des réels.

Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, où m est le **coefficient directeur (ou pente)** de la droite et p est **l'ordonnée à l'origine**.

Dans ce cas, le coefficient directeur (ou pente) de la droite (d) passant par les points A et B distincts est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Toute droite du plan **parallèle à l'axe des ordonnées** admet **une équation réduite** de la forme $x = k$, où k est un réel.

Cette droite admet $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle n'a ni pente, ni ordonnée à l'origine.

Rappels : équation cartésienne d'un cercle :

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan de R un réel strictement positif.

L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est le cercle C de centre A et de rayon R.

L'équation $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est une équation cartésienne du cercle C.

Exercices : Géométrie repérée, vecteurs et droites du plan

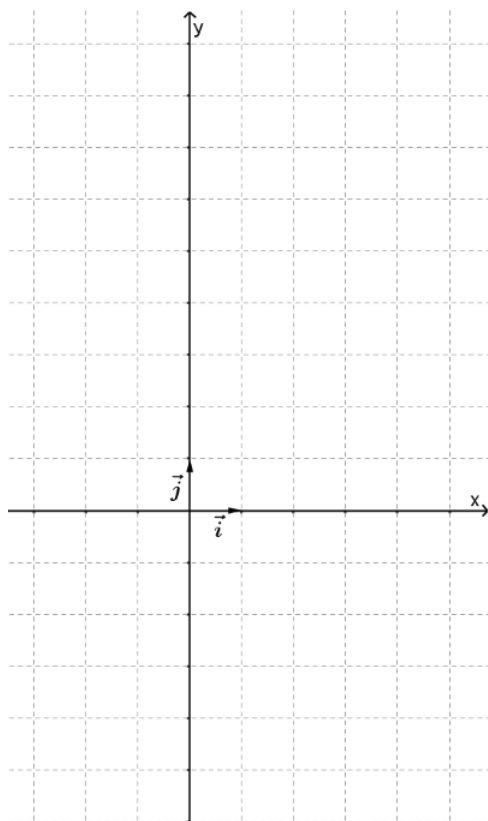
Exercice 1

On considère les vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{9} \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs \vec{u} et \vec{w} sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2

1. Soit la droite D passant par le point $A(1 ; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Quelle est son équation cartésienne ?
2. Soit la droite Δ passant par le point $B(1 ; -4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Quelle est son équation cartésienne ?
3. Tracer les droites D et Δ dans le repère ci-dessous. Placer aussi les points A et B ainsi qu'un représentant des vecteurs \vec{u} et \vec{n} .



Exercice 3

1. Déterminer un vecteur directeur \vec{u} et un vecteur normal \vec{v} de la droite d dont une équation cartésienne est $-3x + 2y + 1 = 0$
2. Quelle est l'équation réduite de cette droite ?
3. Le point $A(5 ; -7)$ appartient-il à d ? Justifier.
4. Déterminer les coordonnées du point E , intersection de d et de l'axe des abscisses.
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' , perpendiculaire à d et passant par A .

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-3 ; 1)$ et $B(2 ; -2)$ ainsi que la droite d d'équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Justifier que les droites d et (AB) sont sécantes puis donner les coordonnées de leur point d'intersection.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ parallèle à la droite d et passant par $C(-1 ; -3)$.

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$ orthonormé, on considère le cercle \mathcal{C} de centre $K(3 ; -1)$ et de rayon 5.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle \mathcal{C} .
2. Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle \mathcal{C} :

$$M(-1 ; 2) \quad ; \quad N\left(\frac{8}{5} ; -\frac{29}{5}\right) \quad ; \quad P\left(\frac{9}{5} ; \frac{2}{5}\right)$$

Problème 5

Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$, on considère les trois points: $A(-3 ; 2)$; $B(3 ; 5)$; $C(2 ; 2)$

1. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C .
2. Déterminer l'aire du triangle ABC .

Probabilités : rappels de cours

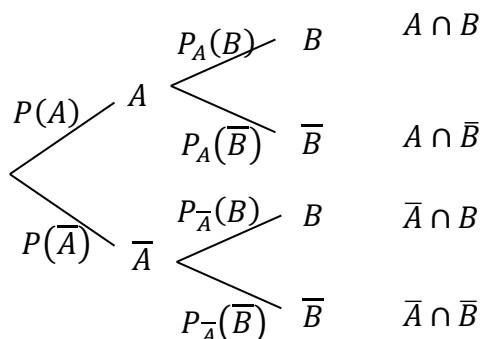
On considère une loi de probabilité P définie sur un univers Ω .

➤ Probabilités conditionnelles

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- La probabilité de B sachant A est : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

➤ Représentation à l'aide d'un arbre ou d'un tableau



	B	\bar{B}	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

1) la somme des probabilités des branches issues d'un même événement est toujours égale à 1.

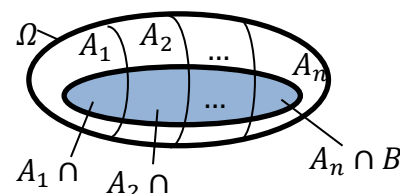
2) la probabilité de $A \cap B$ est obtenue en multipliant les probabilités le long des branches aboutissant à B et passant par A .

➤ Formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, \dots, A_n constitue **une partition de l'univers Ω** et $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors, pour tout événement B , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$



➤ Indépendance de deux événements

- On dit que les événements A et B sont **indépendants** si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Si $P(A) \neq 0$, on a : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

➤ Variable aléatoire

- Définition : Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω . Une **variable aléatoire**, notée X , est une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , qui à chaque issue de Ω , associe un nombre réel.

- Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω . Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. On définit **la loi de probabilité** de X quand à chaque valeur x_i ($1 \leq i \leq n$), on associe la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

On peut donc établir le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$...	$P(X = x_n)$

- L'**espérance** de la variable aléatoire X , notée $E(X)$, est le nombre réel défini par :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

- La **variance** de la variable aléatoire X , notée $V(X)$, est le nombre réel défini par :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X , notée $\sigma(X)$, est le nombre réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercices : probabilités

Exercice 1

Une association sportive organise une grande loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2 000.

Parmi tous ces billets :

- Un billet rapporte un lot de 1 200 € (*c'est le plus gros lot*);
- Quatre billets rapportent chacun un lot de 200 €.
- Dix billets rapportent chacun un lot de 50 €.
- Tous les autres billets ne rapportent rien.

Le prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.

X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.

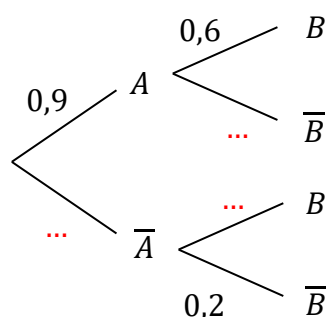
- 1) Donner la loi de probabilité de X ?
- 2) Déterminer l'espérance $E(X)$, arrondie au centième, puis interpréter la valeur obtenue.
- 3) Au lieu de rapporter 1 200 €, combien doit rapporter le plus gros lot afin que le jeu soit équitable ?

Exercice 2

On considère l'arbre pondéré ci-contre.

Le compléter puis calculer :

- 1) $P(A \cap B)$.
- 2) $P(B)$.
- 3) $P(A \cup B)$.
- 4) $P_B(A)$. On arrondira à 10^{-2} .



Exercice 3

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

Le livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

- a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .
- c. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
- d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ?
On arrondira à 10^{-3} .

Exercices : second degré

Exercice 1

$$1) f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \text{ ou } x-1 = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 1 \Leftrightarrow S = \{-4; 1\}$$

$$2) f(x) = 6,25 \Leftrightarrow -(x+1,5)^2 + 6,25 = 6,25 \Leftrightarrow -(x+1,5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1,5)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1,5 = 0$$

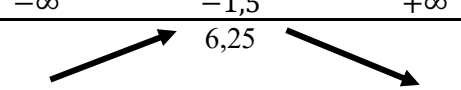
$$f(x) = 6,25 \Leftrightarrow x = -1,5 \Leftrightarrow S = \{-1,5\}$$

3) f est une fonction polynôme de degré 2 telle que : $f(x) = -(x+1,5)^2 + 6,25$ avec $a = -1$; $\alpha = -1,5$ et $\beta = 6,25$.

Comme $a = -1 < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1,5]$ et strictement décroissante sur $[-1,5 ; +\infty[$.

f admet un maximum $\beta = 6,25$ atteint en $x = -1,5$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
Variations de f			6,25

Exercice 2

Dans chaque cas, on a l'écriture $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

° On regarde si la parabole est tournée vers le haut ($a > 0$) ou vers le bas ($a < 0$). C_3 est la seule tournée vers le bas et f_2 a pour coefficient a le nombre -1 . Donc **C_3 représente f_2** .

° Le sommet de la parabole est $S(\alpha ; \beta)$. Pour f_3 , on obtient $S_3(-1 ; 2)$. C'est donc **C_4 qui représente f_3** .

° Pour les deux paraboles restantes, le sommet est le même (de coordonnées $(-1 ; 2)$) ; il faut donc les distinguer autrement, par exemple en calculant $f(0)$: $f_1(0) = 3$. C'est donc **C_2 qui représente f_1** . On en déduit que **C_1 représente f_4** .

Remarque : il y a d'autres façons de faire ; on peut, par exemple, calculer l'image de 0,5 par chacune des fonctions et regarder quelle courbe passe par le point de coordonnées $(0,5 ; f(0,5))$

Exercice 3

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$2x^2 + 3x - 5$ est un trinôme et **1** en est une solution évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = 1 \times x_2 = x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2} = -2,5$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2,5 ; 1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$ l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -2,5 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad S = \{-2,5 ; 1\}.$$

b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-5) \times (-4) = 49 - 80 = -31.$$

$\Delta < 0$ l'équation n'admet aucune solution réelle $S = \emptyset$.

c) $9x^2 - 18x + 9 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3} = 1$

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 9 \times 9 = 324 - 324 = 0$

$\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2 \times 9} = \frac{18}{18} = 1$. $S = \{1\}$.

d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x^2 + 3x + 2$ est un trinôme et **-1** en est une solution évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = -1 \times x_2 \Leftrightarrow -x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{1} = -2$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2 ; -1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$\Delta > 0$ l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \quad S = \{-2; -1\}.$$

Exercice 4

a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49.$

$\Delta > 0$ $f(x)$ est factorisable et s'écrit : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{3-7}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Donc $f(x) = (x + 2)(x - 5).$

b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 1 - 84 = -83. \Delta < 0, g(x)$ ne se factorise pas.

c) $\Delta = 40^2 - 4 \times (-8) \times (-50) = 1600 - 1600 = 0$

$\Delta = 0, h(x)$ est factorisable et s'écrit : $h(x) = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2 \times (-8)} = \frac{-40}{-16} = 2,5.$

Donc $h(x) = -8(x - 2,5)^2$

Exercice 5

Méthode : On calcule Δ , on cherche les racines éventuelles, on fait le tableau de signes et on lit les solutions de l'inéquation dans le tableau.

1) $\Delta = 9$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$; signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 1$) ;
 $s_1 =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

2) $\Delta = -23$; le trinôme n'a pas de racine; il a le signe de a pour tout réel x .
 $a = -3$, donc, pour tout $x, -3x^2 + x - 2 \leq 0. \quad s_2 =]-\infty ; +\infty[$

3) Par factorisation (ou calcul de Δ) : $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$;

signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ; $s_3 =]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [0 ; +\infty[$

4) $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ;
 $s_4 =]-2 ; 2[$

Problème 1

a) « L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte. »

Donc le prix de vente à la tonne est donné par :

$$\frac{C(25)}{25} = \frac{25^2 + 632 \times 25 + 1075}{25} = \frac{625 + 15800 + 1075}{25} = \frac{17500}{25} = 700 \quad \text{Le prix de vente à la tonne est } 700 \text{ €.}$$

b) Soit $B(q)$ l'expression du bénéfice en fonction de q , avec $q \in [0; 60]$.

$$B(q) = R(q) - C(q) = 700q - (q^2 + 632q + 1075) = 700q - q^2 - 632q - 1075$$

$$B(q) = -q^2 + 68q - 1075$$

c) Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation $B(q) > 0$ c'est-à-dire

$$-q^2 + 68q - 1075 > 0.$$

$\Delta = 68^2 - 4 \times (-1) \times (-1075) = 324, \Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles :

$$q_1 = \frac{-68-\sqrt{324}}{2 \times (-1)} = \frac{-68-18}{-2} = \frac{86}{2} = 43 \text{ et } q_2 = \frac{-68+\sqrt{324}}{2 \times (-1)} = \frac{-68+18}{-2} = \frac{50}{2} = 25.$$

B admet le tableau de signes suivant :

Ainsi, les solutions de l'inéquation $-q^2 + 68q - 1075 > 0$
sont : $S =]25; 43[$

q	0	25	43	60	
Signe de $B(q)$	-	0	+	0	-

Pour que l'activité soit rentable, la production doit se situer dans l'intervalle $]25; 43[$.

Exercices : dérivation

Exercice 1

1) a. $f'(-3) = 9$ et $f(-3) = -2$.

b. $f'(-2) = 0$ et $f(-2) = 2$.

c. $f'(-1) = -3$ et $f(-1) = 0$.

2) L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -3 est :

$$y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3) = 9(x + 3) - 2 = 9x + 27 - 2 = 9x + 25$$

L'équation réduite de la tangente T_1 à C_f au point d'abscisse -2 est :

$$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) = 0(x + 2) + 2 = 2$$

L'équation réduite de la tangente T_2 à C_f au point d'abscisse -1 est :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = -3(x + 1) + 0 = -3x - 3$$

3) Le nombre dérivé est négatif sur $] -2 ; 0[$ (car f décroît sur cet intervalle)

4) Le nombre dérivé est positif sur $] -\infty ; -2[$ et sur $]0 ; +\infty[$ (car f est croissante sur ces intervalles)

Exercice 2

1) $f'(x) = 4x$

2) $g'(x) = 4x^3 + 6x^2$

3) $h'(x) = -\frac{4}{x^5}$

4) $i'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$

Exercice 3

On utilise le théorème du cours liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

° C_1 est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $] -\infty ; -0,5[$ et sur $]0 ; 0,5]$ donc f_1 est positive sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est croissante sur ces intervalles.

° C_1 est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-0,5 ; 0]$ et sur $]0,5 ; +\infty[$ donc f_1 est négative sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est décroissante sur ces intervalles.

On peut donc en conclure que C_2 représente f et C_1 représente f' .

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

1) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

2)

$$\Delta = 16 \text{ donc } \Delta > 0 \text{ et il y a deux racines : } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{1}{3}$$

Le trinôme $3x^2 + 2x - 1$ a le signe de a ($a = 3$) « à l'extérieur des racines ».

3)

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
variations de f		↗	↘	↗	

1 $-\frac{5}{27}$

4) $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15$

L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 15(x - 2) + 10 = 15x - 30 + 10 = 15x - 20$$

Exercice 5

1) $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ f est décroissante sur $]0; \frac{1}{3}]$ et croissante sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$

2) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ f est décroissante sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$ et f est croissante sur $] -\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$

3) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ f est croissante sur $] -\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$

Problème 2

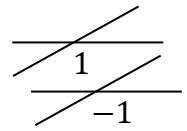
1) $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

2) et 3)

$h'(x)$ s'annule pour : $3(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
Signe de $x - 1$	-	0	+	+	$m > 0$ donc
Signe de $x + 1$	-	-	0	+	$m > 0$ donc
Signe de $h'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de h					



Pour tout $x \in [0; 1[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de \mathcal{D} .

Pour tout $x \in]1; +\infty[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de \mathcal{D} .

Pour $x = 1$: $h(x) = f(x) - g(x) = 0$, donc C_f et \mathcal{D} sont sécantes au point d'abscisse 1.

Exercices : suite

Exercice 1 $u_5 = \frac{2 \times 5 + 1}{5 + 1} = \frac{11}{6}$

Exercice 2

1) $u_0 = (0 + 5)^2 + 2 = 27$ $u_1 = (1 + 5)^2 + 2 = 38$ $u_2 = (2 + 5)^2 + 2 = 51$

1) $u_{n+1} = ((n + 1) + 5)^2 + 2 = (n + 6)^2 + 2 = n^2 + 12n + 36 + 2 = n^2 + 12n + 38$

2) $u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - (n + 5)^2 - 2 = n^2 + 12n + 38 - (n^2 + 10n + 25) - 2$

$u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - n^2 - 10n - 25 - 2 = 2n + 11$

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 2n + 11$

Ainsi, pour entier naturel n , $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

$u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$

$u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

$u_3 = 2 \times u_2 - 4 = 2 \times 0 - 4 = -4$

Exercice 4

$u_1 = \frac{4}{3}$; $u_2 = \frac{7}{4}$; $u_3 = \frac{11}{7}$

Exercice 5

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 16 + 4n$.

2) $u_6 = 16 + 4 \times 6 = 16 + 24 = 40$.

Exercice 6

On calcule les trois premiers termes, par exemple :

$u_0 = 0$ $u_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 1 + 4 = 5$

$u_2 = 2^2 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12$

Calculons les différences :

$u_1 - u_0 = 5 - 0 = 5$ $u_2 - u_1 = 12 - 5 = 7$

donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

Ainsi, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 4(n + 1) + 7 - (4n + 7) = 4n + 4 + 7 - 4n - 7 = 4$

Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4 \times 0 + 7 = 7$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r$

$u_{20} = 28 \Leftrightarrow u_0 + 20r = 28 \Leftrightarrow u_0 = 28 - 20r$

Ainsi, $9 - 5r = 28 - 20r \Leftrightarrow -5r + 20r = 28 - 9 \Leftrightarrow 15r = 19 \Leftrightarrow r = \frac{19}{15}$

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{19}{15} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

3) **Méthode 1** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r = 9 - 5 \times \frac{19}{15} = 9 - \frac{19}{3} = \frac{8}{3}$

Donc $u_{50} = \frac{8}{3} + 50 \times \frac{19}{15} = 66$.

Méthode 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n - p)r$

$u_{50} = u_5 + (50 - 5) \frac{19}{15} = 9 + 45 \times \frac{19}{15} = 66$

Exercice 9

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 2 \times 3^n$
- 2) $u_3 = u_0 q^3 = 2 \times 3^3 = 54$.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 7 \times q^n$

$$u_2 = 28 \Leftrightarrow 7 \times q^2 = 28 \Leftrightarrow q^2 = \frac{28}{7} = 4$$

Comme q est positif on en déduit que $q = \sqrt{4} = 2$

$$u_5 = 7 \times 2^5 = 224$$

Exercice 11

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} = 1,5$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 12

1) $v_2 = v_1 \times q = 480 \times \frac{1}{2} = 240$; $v_3 = 120$; $v_4 = 60$.

2) Pour tout entier naturel n , $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) $v_{n+1} - v_n = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $= 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$-240 < 0 \text{ et } \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0 \text{ (car } \frac{1}{2} > 0 \text{ et ses puissances aussi).}$$

Donc, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite est décroissante.

Problème 3

- 1) $v_1 = v_0 + 15 = 20 + 15 = 35$; $v_2 = v_1 + 15 = 35 + 15 = 50$; $v_3 = v_2 + 15 = 50 + 15 = 65$
- 2) v_{n+1} représente le nombre de Smartphones vendus le mois $n + 1$ de l'année 2016 or ce commercial arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Donc : $v_{n+1} = v_n + 15$.
Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$.
- 3) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$ donc :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$
$$v_n = 20 + 15n$$
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n > 200 \Leftrightarrow 20 + 15n > 200 \Leftrightarrow 15n > 180 \Leftrightarrow n > \frac{180}{15} \Leftrightarrow n > 12$
Donc à partir du mois de janvier 2017 il vend plus de 200 Smartphones par mois.

Problème 4

- a) $Q_1 = 4\,500 \times 1,03 = 4\,635 \text{ €}$ et $Q_2 = 4\,635 \times 1,03 = 4\,774,05 \text{ €}$.
- b) La suite (Q_n) est une **suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de terme initial $Q_0 = 4\,500$** .
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = Q_0 \times q^n$, donc $Q_n = 4\,500 \times 1,03^n$.
- d) On cherche le plus petit entier N tel que $4\,500 \times 1,03^N > 9\,000$. On trouve $N = 24$.
 $2015 + 24 = 2039$ donc le loyer dépassera le double du loyer initial en 2039.

Exercices : fonction exponentielle

Exercice 1

- a) $e^x \times e^{3x-1} = e^{x+3x-1} = e^{4x-1}$
b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e^{-x-(4-x)} = e^{-x-4+x} = e^{-4}$
c) $(e^{5x})^3 = e^{5x \times 3} = e^{15x}$
d) $(e^x - 1)(e^x + 1) = (e^x)^2 - 1^2 = e^{2x} - 1$
e) $\frac{e^{-x} \times e^{9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{-x+9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{8x}}{e^{3x}} = e^{8x-3x} = e^{5x}$
f) $e^x \times e^{5x-2} \times e = e^{x+5x-2+1} = e^{6x-1}$
g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x = e^{-x-(7-x)} \times e^x = e^{-x-7+x+x} = e^{-7+x}$
h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{x+4}}{e^{6x}} = e^{x+4-6x} = e^{-5x+4}$

Exercice 2

- a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-7n}$. donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-7}$ et de premier terme $u_0 = e^{-7 \times 0} = e^0 = 1$.
- b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{-2n+7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{5n}}{e^{3n}} = e^{5n-3n} = e^{2n}$. donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{2 \times 0} = e^0 = 1$.
- c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = (e^{-4n})^{-2} = e^{-4n \times (-2)} = e^{8n}$. donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = e^8$ et de premier terme $w_0 = e^{8 \times 0} = e^0 = 1$.

Exercice 3

- a) $e^{3x-7} = -2$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{3x-7} > 0$ donc $S = \emptyset$.
- b) $(e^x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $S = \{0\}$.
- c) $e^{-3x+8} = e^{-5} \Leftrightarrow -3x + 8 = -5 \Leftrightarrow -3x = -13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$ donc $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$.
- d) $e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ donc $S = \{-1; 1\}$.

Exercice 4

- a) $e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]1; +\infty[$.
- b) $e^{-3x+1} \geq e^4 \Leftrightarrow -3x + 1 \geq 4$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $\Leftrightarrow -3x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -1$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -1]$.
- c) $e^{7x-21} < 1 \Leftrightarrow e^{7x-21} < e^0 \Leftrightarrow 7x - 21 < 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $\Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; 3[$.
- d) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leq 0 \Leftrightarrow e^{-2x+5} \leq e^{8x-3} \Leftrightarrow -2x + 5 \leq 8x - 3$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $\Leftrightarrow -2x - 8x \leq -5 - 3 \Leftrightarrow -10x \leq -8 \Leftrightarrow x \geq 0,8$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [0,8; +\infty[$.
- e) $e^x \leq 0$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ donc $S = \emptyset$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f: x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$

f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et $f'(x) = 4e^{4x+1} - 4 = 4(e^{4x+1} - 1)$, pour tout réel x .

On obtient le signe de $f'(x)$ en résolvant l'inéquation $4(e^{4x+1} - 1) \geq 0$.

$$4(e^{4x+1} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geq e^0 \Leftrightarrow 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{4}$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{4}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

$$f\left(\frac{-1}{4}\right) = e^{4 \times \frac{-1}{4} + 1} - 4 \times \left(\frac{-1}{4}\right) + 7 = 1 + 1 + 7 = 9$$

b) $g: x \mapsto xe^{5x}$

g est de la forme $u \times v$ avec, pour tout réel x , $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$

g est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$

Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 5e^{5x}$

Et $g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 1 \times e^{5x} + 5e^{5x} \times x = (5x + 1)e^{5x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{5x} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $5x + 1$ sur \mathbb{R} .

Or $5x + 1 > 0 \Leftrightarrow 5x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$.

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de g			

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}e^{5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{1}{5}e^{-1}$$

c) $h: x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$

La fonction h est définie et dérivable sur \mathbb{R} . (car $e^x > 0$ pour tout x réels)

h est de la forme $\frac{1}{v}$ avec, pour tout réel x , $v(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$

Et $h'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-e^x < 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $h'(x)$ est strictement négative sur \mathbb{R} , et la fonction h est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

d) $k: x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x + 3}$

k est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

k est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, pour tout réel x , $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x + 3$

Donc $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

Et $k'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x \times (e^x + 3) - (e^x + 1) \times e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x + 3 - e^x - 1) \times e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 3)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$ et $(e^x + 3)^2 > 0$ donc $k'(x)$ est strictement positive sur \mathbb{R} , et la fonction k est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exercices : Géométrie repérée, vecteurs et droites du plan

Exercice 1

1. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{9} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \times (-\frac{5}{9}) - \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$. Donc ces vecteurs sont colinéaires.

$\vec{u} \cdot \vec{w} = -\frac{3}{2} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 3 = 3 + \frac{3}{2} \neq 0$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{w} ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2

1. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow 5(x-1) - (-2)(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 5 + 2y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$

Une équation cartésienne de D est $5x + 2y - 13 = 0$

2. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) + 5(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 2 + 5y + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 5y + 18 = 0$

Une équation cartésienne de Δ est $2x + 5y + 18 = 0$

Exercice 3

1. La droite d'équation $-3x + 2y + 1 = 0$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $-3x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ qui est l'équation réduite de cette droite.

3. $A(5; -7)$ appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de d .

Or $-3 \times 5 + 2 \times (-7) + 1 = -15 - 14 + 1 \neq 0$ donc $A \notin d$

4. E appartient à l'axe des abscisses donc son ordonnée est nulle.

$E(x_E; 0) \in d \Leftrightarrow -3x_E + 2 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x_E = -1 \Leftrightarrow x_E = \frac{1}{3}$

donc $E(\frac{1}{3}; 0)$

5. La droite d' est perpendiculaire à d donc elle admet le vecteur \vec{u} comme vecteur normal et son équation est de la forme $-2x - 3y + c = 0$

De plus, $A(5; -7) \in d'$

$\Leftrightarrow -2 \times 5 - 3 \times (-7) + c = 0$

$\Leftrightarrow -10 + 21 + c = 0 \Leftrightarrow c = -11$

Ainsi une équation cartésienne de d' est $-2x - 3y - 11 = 0$ et une autre équation, plus simple, $2x + 3y + 11 = 0$

On peut vérifier toutes nos réponses en traçant les droites et vecteurs dans un repère :

Exercice 4

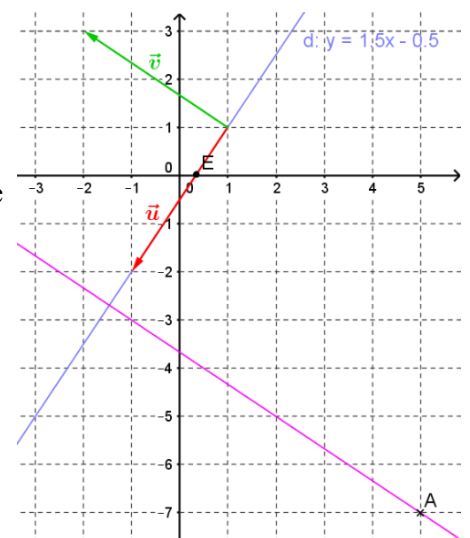
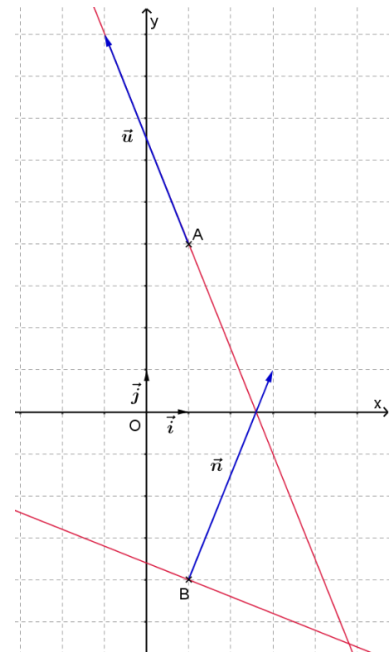
1. $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} (-3)-(-2) \\ -1-(-2) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La droite (AB) admet le vecteur \overrightarrow{BA} comme vecteur directeur donc une équation cartésienne est de la forme $3x + 5y + c = 0$

Et $A \in (AB)$ donc $3 \times (-3) + 5 \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 4$

Ainsi une équation cartésienne de la droite (AB) est $3x + 5y + 4 = 0$

3.



2. d a pour équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$ donc elle admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ainsi les droites d et (AB) ne sont pas parallèles.

Leur point d'intersection est le point dont les coordonnées vérifient le système :

(S) $\begin{cases} 3x + 5y + 4 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$ on peut le résoudre par combinaisons linéaires en soustrayant les deux équations :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 4 = 0 \\ 9y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 4 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5 \times (-1) + 4 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et de (AB) est le point de coordonnées $(\frac{1}{3}; -1)$

3. Δ est parallèle à d d'équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$ donc elle admet le même vecteur directeur et son équation est de la forme $3x - 4y + c = 0$

Or $C(-1; -3) \in \Delta \Leftrightarrow 3 \times (-1) - 4 \times (-3) + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$

Donc l'équation de Δ est : $3x - 4y - 9 = 0$

Exercice 5

1. L'équation cartésienne du cercle \mathcal{C} de centre K et de rayon R est de la forme :

$(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2$ donc, ici : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

2. Un point appartient à un cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.

Pour $M(-1; 2)$: $(-1 - 3)^2 + (2 + 1)^2 = 16 + 9 = 25$ donc $M \in \mathcal{C}$

Pour $N(\frac{8}{5}; -\frac{29}{5})$: $(\frac{8}{5} - 3)^2 + (-\frac{29}{5} + 1)^2 = (-\frac{7}{5})^2 + (-\frac{24}{5})^2 = \frac{49}{25} + \frac{576}{25} = \frac{625}{25} = 25$ donc $N \in \mathcal{C}$

Pour $P(\frac{9}{5}; \frac{2}{5})$: $(\frac{9}{5} - 3)^2 + (\frac{2}{5} + 1)^2 = (-\frac{6}{5})^2 + (\frac{7}{5})^2 = \frac{36}{25} + \frac{49}{25} = \frac{85}{25} = \frac{17}{5} \neq 25$ donc $P \notin \mathcal{C}$

Problème 5

1. On cherche les équations de (AB) et de la hauteur car H est l'intersection de ces deux droites.

- $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 - (-3) \\ 5 - 2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

La hauteur (HC) admet le vecteur \vec{AB} comme vecteur normal donc elle admet une équation cartésienne de la forme $6x + 3y + c = 0$

Et $C \in (HC)$ donc $6 \times 2 + 3 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -18$

Ainsi, la hauteur issue de C a pour équation cartésienne $6x + 3y - 18 = 0$

- La droite (AB) admet le vecteur \vec{AB} comme vecteur directeur donc elle admet une équation cartésienne de la forme $3x - 6y + c = 0$

Et $A \in (AB)$ donc $3 \times (-3) - 6 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 21$

Ainsi (AB) a pour équation cartésienne $3x - 6y + 21 = 0$

- H est l'intersection des droites (AB) et (HC) , ses coordonnées vérifient le système :

(S) $\begin{cases} 3x - 6y + 21 = 0 \\ 6x + 3y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases}$ (on pouvait simplifier les équations pour résoudre par substitution).

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ 2(2y - 7) + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ 4y - 14 + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ 5y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ y = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 4 - 7 = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

Donc le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC est $H(1; 4)$.

2. $Aire(ABC) = \frac{AB \times CH}{2}$

On calcule $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

et $CH = \sqrt{(x_H - x_C)^2 + (y_H - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5}$

$Aire(ABC) = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2}$

L'aire du triangle ABC est 7,5.

Exercices : probabilités

Exercice 1

1) X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.

Cette variable aléatoire prend les valeurs :

-2 ; 48 ; 198 et $1\ 198$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est

donc :

x_i en €	-2	48	198	$1\ 198$
$p(X = x_i)$	$\frac{1985}{2000}$	$\frac{10}{2000}$	$\frac{4}{2000}$	$\frac{1}{2000}$

$$2) E(X) = \frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times 1198 = -\frac{3}{4}$$

Le gain moyen que peut espérer un joueur est de $-0,75$ €.

L'espérance est négative donc le jeu n'est pas favorable aux joueurs.

3) Soit x la somme rapportée par le plus gros lot.

Le jeu est équitable lorsque :

$$E(X) = 0 \text{ c'est-à-dire } \frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } -\frac{2698}{2000} + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } x = \frac{2698}{2000} \times 2000 + 2 = 2700$$

Ainsi, le plus gros lot doit rapporter $2\ 700$ € afin que le jeu soit équitable.

Exercice 2

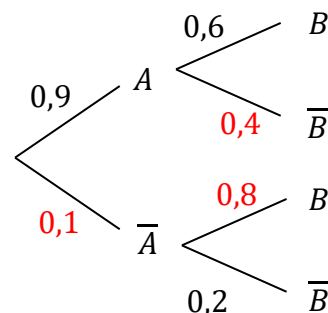
$$1) P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,9 \times 0,6 = 0,54$$

2) A et \bar{A} constitue une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,54 + 0,1 \times 0,8 = 0,54 + 0,08 = 0,62$$

$$3) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 + 0,62 - 0,54 = 0,98$$

$$4) P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,54}{0,62} \approx 0,87$$



Exercice 3

a. Voilà l'arbre pondéré traduisant la situation de l'exercice :

$$b. P(C \cap H_3) = P_{H_3}(C) \times P(H_3) = 0,3 \times 0,4 = 0,12.$$

La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est de **0,12**.

c. H_1 , H_2 et H_3 constitue une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,12 = 0,525.$$

La probabilité de l'événement C est donc bien égale à **0,525**.

d. On cherche $P_C(H_1)$.

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$$

Sachant que l'arbre choisi est un conifère, la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 est donc environ égale à **0,533**.